Μαθημα 7ο — 24/3/2017

Αλγεβρικες δομες

Ασκησεις Φυλλαδιο #2

ΑΣΚΗΣΗ 1

$GL(2,\mathbb{Q})$

$o\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=2 \qquad o\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=2$

$o\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\infty$

$o\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\infty$

$o\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\infty \qquad o\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=\infty$

Ασκηση 2

$A=\left\{I,-I,\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},-k,\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},-j,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},-L\right\}$

$A\subseteq GL(2,\mathbb{Q})$

$|A|=8$ και πραξη καλα οριομενη $\Rightarrow A\leq GL(2,\mathbb{Q})$

$kj=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\in A$

$jk=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=L\in A$

$kL=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=-j\in A$

Το ιδιο και για τα αλλα

$O(j)=4=O(-j)$

$\left.\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right\}$ Αβελιανη

$D_4\simeq A,\ Q_8$

Ασκηση 3

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ οχι κυκλικη

Συμφωνα με το θεωρημα

$(2,4)=2 \Rightarrow$ οχι κυκλικη

Δεν εχει στοιχειο ταξης 8

$\mathbb{Z}_n = \langle [1]_n \rangle$

$a([0]_n) = 1$

$A = \langle j, i \rangle / j^4 = I = i^2$ και $iji = i(-k) = (-1) = j^3$

$ji = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -k$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$D_4 = \{1, f, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\}$

$f^4 = 1 = g^2 \quad , \quad gf^2g = f^{-1}$

$D_4 = \{1, f, f^2, f^3, fg, f^2g, f^3g\}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_2 \, , \, \langle [0]_2 \rangle$

$(C_8) \cong (\mathbb{Z}_8, +)$

" $\{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$

διαιρετες 1, 2, 4

$\mathbb{Z}_2 : \quad \{[0]_2\} \mid \mathbb{Z}_4 \quad , \{[0]_4\} \, , \{[2]_4\} \, , \{[0]_4\}$

$A_1 \quad A_2 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3$

$A_i \times B_j \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \qquad i = 1,2 \, , \, j = 1,2,3$

$\{([1]_2, [1]_4), ([0]_2, [2]_4), ([1]_2, [3]_4), ([0]_2, [0]_4)\}$

$\{[0]_2 \times \mathbb{Z}_4 \quad , \quad \mathbb{Z}_2 \times \{[2]_4, [0]_4\}$

Τα καρτεσιανα γινομενα υποομαδων ειναι υποομαδες τάξη 2 τάξη 2

$\{([1]_2, [2]_4), ([0]_2, [0]_4)\}$

Σπίτι: Αν υπάρχουν άλλες;

(+) $D_4 = \langle f, g\rangle/\text{σχέσεις} = \langle f^3, g\rangle/ = \langle f^3, fg\rangle/$

$\langle f^2, g\rangle/\text{σχέσεις} = \{f^2, g, (f^2)^2 = 1 = g^2, f^2 g\} \leq D_4$

Άσκηση 4

G αβελιανή $Y = \{a \mid a^\nu = 1\} \leq G$

$= \{$όλα τα στοιχεία της G των οποίων η τάξη διαιρεί το $\nu\}$

$o(a) \mid \nu$ και $o(b) \mid \nu \Rightarrow o(ab) \mid \nu$

$(ab)^\nu = ab\, ab\, ab \cdots ab \overset{\text{αβελ.}}{=} a^\nu b^\nu = 1 \Rightarrow ab \in Y$

Αν $a \in Y \Rightarrow a^{-1} \in Y$

Άσκηση 5

G ομάδα. Αν G όχι κυκλική $\exists\, a, b \in G$ με $b \neq a^\nu$

$\langle b\rangle \neq \langle a\rangle \leq G$

Άρα G κυκλική

$|G| = n \quad \forall\, d \mid n \Rightarrow \exists\, Y \leq G, \ |Y| = d$

Από την υπόθεση οι υποομάδες της G είναι μόνο $\{1\}$ και $\{G\}$

Άσκηση 6

$Z(a) = \{b \in O \mid ab = ba\}$ κεντροποιητής του a

$Z(O) = \{a \in O \mid ab = ba \ \forall b \in O\}$ κέντρο της O

$b, b' \in Z(a) \Rightarrow (bb')a = a(bb') \iff b(b'a) = (ab)b' \iff$

$b(ab') = (ba)b' \iff (ba)b' = b(ab') \iff abb' = (ba)b' \iff$

$abb' = abb'$

$b^{-1}a = ab^{-1} \iff bb^{-1}a = bab^{-1} \iff a = abb^{-1} \iff a = a$

Άσκηση 7

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ κυκλική

$\langle (a,b) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(\kappa a, \kappa b)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\exists \kappa : (\kappa a, \kappa b) = (1,0)$ Αδύνατο!

$\exists \lambda : (\lambda a, \lambda b) = (0,1)$

$(a_1, a_2, a_3) \in O_1 \times O_2 \times O_3$

$O(a_1, a_2, a_3) = \text{ΕΚΠ}(O(a_1), O(a_2), O(a_3))$

Συμμετρικές Ομάδες Σ_ν

$\Sigma_\nu = \{ f : \{1,2,\dots,\nu\} \xrightarrow{1-1} \{1,2,\dots,\nu\} \}$ με την σύνθεση

γίνεται ομάδα

$|\Sigma_\nu| = \nu!$

Κάθε στοιχείο της Σ_ν θα καλείται μετάθεση

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \dots & f(\nu) \end{matrix}$$

$(fg)(i) = f(g(i))$ σύνθεση

Παραδειγμα

$f: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{matrix}$ $g: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{matrix}$

$fg: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} f \\ g \\ \end{matrix}$ Οταν τα στοιχεια μενουν αναλλοιωτα δεν το γραφουμε

Τοτε η fg θα ειναι: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$ fg

Ορισμος Μια μεταθεση καλειται κυκλος αν ειναι της μορφης
$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots \to a_k \to a_1$
Τα $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, r\}$
Οι κυκλοι συμβολιζονται: $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ και εχει μηκος κ

⊛ Ενας κυκλος μηκους 2 ονομαζεται αντιμεταθεση αν: (a_1, a_2)

Προταση
Ενας κυκλος μηκους κ εχει ταξη κ

Ορισμος Δυο κυκλοι $(a_1, \dots, a_k)$ και $(b_1, \dots, b_\ell)$ καλουνται ξενοι αν $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_\ell\} = \emptyset$

Ιδιοτητες

Δυο ξενοι κυκλοι αντιμετατιθενται

$(a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_l) = (b_1, \dots, b_l)(a_1, \dots, a_k)$

Υπενθυμιση:

Αν $a, b \in O$ με $ab = ba$ τοτε $O(ab) = \text{ΕΚΠ}(O(a), O(b))$

Πορισμα

Αν οι κυκλοι $(a_1, \dots, a_k)$ και $(b_1, \dots, b_l)$ ειναι ξενοι μεταξυ τους, τοτε:

$O((a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_l)) = \text{ΕΚΠ}(k, l)$

πχ $O((1,2)(1,2)) = 1 \neq \text{ΕΚΠ}(2,2)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Πως βρισκουμε την συνθεση

ταξη 10 $\underset{f}{(1,5,3,7,8,2)}\underset{g}{(2,3,4,5,7)} = (2,7,1,5,8)(3,4)$ → ταξη 10

$2 \xrightarrow{g} 7$, $3 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 7$, $7 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 1$

$1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5$, $5 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8$, $8 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{f} 2$

$3 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 4$, $4 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 3$

Θεωρημα

Εστω f μεταθεση της S_v. Τοτε υπαρχουν κυκλοι ξενοι μεταξυ τους ωστε $f = g_1 g_2 \dots g_m$ (Εδω g_i καποιος κυκλος) απόδειξη

Έστω 1 και $f(1)$. Αν $f(1)=1$ προχωράω στο 2

Αν $f(1)\neq 1$ τότε έστω $f(1)=a_2$. Τότε εξετάζουμε το $f(a_2)$ και ρωτάμε το ίδιο αν το $f(a_2)=a_2^{-1}$ γράφουμε τον κύκλο $(1,a_2)$, αν $f(a_2)=a_3\neq a_2$ γράφουμε $(1,a_2,a_3$ ⊛ και εξετάζουμε το $f(a_3)$, αν $f(a_3)=a_3=1$ γράφουμε $(1,a_2,a_3)$, αν $f(a_3)=a_4$ γράφουμε $(1,a_2,a_3,a_4$ ⊛ και συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε στο 1.

Αυτό το επαναλαμβάνουμε για όλα τα στοιχεία που χρησιμοποιεί η f

⊛ δεν κλείνω παρένθεση και ελέγχω πρώτα το a_3 στην πρώτη, το a_4 στη δεύτερη και μετά κλείνω

Παράδειγμα

$$f:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 10 & 7 & 9 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ξεκινώ με το 1

$1\to 3\to 1$ Γράφουμε $(1,3)$

$2\to 2$ δεν το γράφω καθόλου

3 το πήραμε

$4\to 10\to 6\to 9\to 5\to 7\to 4$: Γράφουμε $(4,10,6,9,5,7)$

$8\to 8$ τίποτα

Άρα η f θα γραφτεί:

$f=(1,3)(4,10,6,9,5,7)$

Εξάσκηση στο σπίτι

Παραδειγμα (απο πριν)

(4,10,6,9,5,7) 5 αντιμετ. κυκλου μηκους 6

(4,10,6) = (4,6)(4,10) κυκλος μηκους 3

(4,10,6,9,5,7) = (4,7)(4,5)(4,9)(4,6)(4,10)

⊛ Τον καθε κυκλο θα τον γραψω σαν κυκλο αντιμεταθεσεων

Παραδειγμα

(1,3,7) = (1,7)(1,3) = (4,7)(1,7)(1,4)(1,3)

Το πληθος που θα χρησιμοποιησω θα ειναι η αρτιο ή περιττο

Προταση

Καθε κυκλος $(a_1, \dots, a_k)$ μηκους k, μπορει να γραφει ως γινομενο $(k-1)$ αντιμεταθεσεων

$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_k) \dots (a_1, a_3)(a_1, a_2)$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Μπορει να υπαρχουν πολλοι τροποι να γραψουμε εναν κυκλο σαν γινομενο αντιμεταθεσεων

Θεωρημα

Καθε κυκλος γραφεται σαν γινομενο αρτιου ή περιττου πληθους αντιμεταθεσεων αποκλειστικα.

Παραδειγμα

$(1,3,7) = (1,7)(1,3) = (4,7)(1,7)(1,4)(1,3)$

η f γραφεται $f = (1,3)(4,10,6,9,5,7)$

σαν γινομενο αρτιου πληθους αντιμεταθεσεων (οχι περιττου)

$f = (1,3)(4,7)(4,5)(4,9)(4,6)(4,10)$

Ορισμος Οι μεταθεσεις οι οποιες γραφονται σαν γινομενο αρτιου πληθους αντιμεταθεσεων καλουνται αρτιες διαφορετικα περιττες

Παραδειγμα

Εχουμε δει την Σ_3 σαν D_3, δηλαδη ως το συνολο ολων των συμμετρικων του ισοπλευρου τριγωνου

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\} / f^3 = 1 = g^2,\ gfg = f^2$

$f \to (1,2,3)$ Αρτια

$f^2 \to (1,3,2)$ Αρτια

$g \to (2,3)$ Περιττη

$fg \to (1,2,3)(2,3) = (2,1)$ Περιττη

$f^2g \to (1,3,2)(2,3) = (3,1)$ Περιττη

$1 \to$

! Η ταυτοτικη ειναι παντα αρτια

$\{A * A = A \ , \ A * \Pi = \Pi\}$

$\{\Pi * \Pi = A$, περιττές δεν αποτελούν υποομάδα$\}$

Ορισμός Το σύνολο των αρτίων μεταθέσεων στην Σ_ν συμβολίζεται με A_ν και καλείται εναλλάσσουσα (alternate) υποομάδα της Σ_ν

Πρόταση

Το A_ν είναι υποομάδα της Σ_ν τάξης $\nu!/2$.

Απόδειξη

Το A_ν είναι πεπερασμένο, αρκεί να είναι καλά ορισμένη η πράξη. Αλλά το γινόμενο δύο αρτίων μεταθέσεων είναι αρτια.

Έστω $A_\nu = \{f_1, \dots, f_k\}$ θα δείξουμε ότι ακριβώς τόσες είναι και οι περιττές.

Έστω g περιττή $\Rightarrow (1,2)g$ άρτια

$A_\nu = \{f_1, \dots, f_k\}$

$(1,2)A_\nu = \{(1,2)f_1, \dots, (1,2)f_k\}$ περιττές

Έστω g περιττή $\notin (1,2)A_\nu$ όμως $(1,2)g$ άρτια $\in A_\nu \Rightarrow$

$(1,2)g = f_i \Rightarrow (1,2)(1,2)g = (1,2)f_i \in (1,2)A_\nu$

Άρα $\Sigma_\nu = A_\nu \sqcup (1,2)A_\nu$ και μάλιστα $|A_\nu| = |(1,2)A_\nu|$

Τελικά $|A_\nu| = \dfrac{|\Sigma_\nu|}{2} = \dfrac{\nu!}{2}$